Äquivalenz-umformungen

Äquivalenzumformungen – das Instrument, um Aussageformen zu knacken

(die vorherige Lektüre der Lernkarte „Aussageformen" wird empfohlen)

Das begegnet dir in der Mathematik in allen Klassenstufen immer wieder: Zu einer vorgegebenen Aussageform (Gleichungen, Ungleichungen, Gleichungs- und Ungleichungssysteme) musst du deren Lösungsmenge finden, d. h. all jene Elemente der Grundmenge, deren Einsetzung(en) für die Variable(n) die Aussageform zu einer wahren Aussage machen.
Es gibt sehr einfache Aussageformen, deren Lösungsmenge ganz leicht zu bestimmen ist (man „sieht's" sofort oder findet sie schnell durch Probieren), bis hin zu sehr komplizierten.

$x < 5$	$2 \cdot x + 3 = 9$	$x + 10 = 6$	$a < 10 \wedge a \geq 7$	$3 \cdot x - 1 = 5 + x$
$\mathbb{L}_{\mathbb{N}} = \{1, 2, 3, 4\}$	$\mathbb{L}_{\mathbb{N}} = \{3\}$	$\mathbb{L}_{\mathbb{N}} = \{\}$; $\mathbb{L}_{\mathbb{Z}} = \{-4\}$	$\mathbb{L}_{\mathbb{N}} = \{7, 8, 9\}$	$\mathbb{L}_{\mathbb{N}} = \{3\}$

Es gibt Aussageformen, welche in derselben Grundmenge dieselbe Lösungsmenge besitzen. Diese Aussageformen nennt man „äquivalent" (lat. für „gleichwertig").
Unter den obigen Beispielen sind die Aussageformen (in diesem Fall Gleichungen) $2 \cdot x + 3 = 9$ und $3 \cdot x - 1 = 5 + x$ äquivalent. Aber auch die Gleichungen $x = 3$ und $2 \cdot x = 6$ besitzen dieselbe Lösungsmenge $\mathbb{L}_{\mathbb{N}} = \{3\}$, sind also ebenfalls äquivalent (und es gibt noch viele weitere äquivalente, z. B. $4 \cdot x = 12$; du kannst gewiss weitere finden). Die einfachste unter diesen ist $x = 3$ (die Variable steht alleine auf einer Seite der Gleichung).
Wir schauen uns solche äquivalenten Aussageformen genauer an; was haben sie gemeinsam, worin unterscheiden sie sich, und insbesondere: Kann man zu einer komplizierten Aussageform die einfachste äquivalente finden, und wie? Nachstehend sind einige äquivalente Gleichungen aufgelistet, hast du eine Idee?

Erläuterungen
Das Zeichen „$\wedge$" bedeutet „und"; beide Bedingungen müssen erfüllt sein!
$\mathbb{L}_{\mathbb{N}}$ bedeutet „Lösungsmenge in der Grundmenge $\mathbb{N}$"!

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$x + 6 = 9$	$x - 10 = -7$	$2 \cdot x = 6$	$2 \cdot x + 3 = 9$	$3 \cdot x - 1 = 5 + x$
$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$	$x = 3$

zu (1)

$$x + 6 = 9 \quad -6$$
$$x + 6 - 6 = 9 - 6$$
$$x = 3$$

auf beiden Seiten 6 subtrahieren

zu (2)

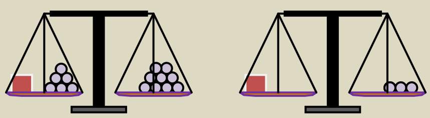
$$x - 10 = -7 \quad +10$$
$$x - 10 + 10 = -7 + 10$$
$$x = 3$$

auf beiden Seiten 10 addieren

zu (3)

$$2 \cdot x = 6 \quad :2$$
$$(2 \cdot x) : 2 = 6 : 2$$
$$x = 3$$

beide Seiten durch 2 dividieren



Eine Gleichung kannst du dir vorstellen als eine im Gleichgewicht befindliche Balkenwaage. Werden beide Waagschalen in gleicher Weise verändert, dann bleibt das Gleichgewicht erhalten.
Auch wenn die Waagschalen nicht im Gleichgewicht sind (Ungleichungen), bleiben sie bei solchen beidseitig gleichen Veränderungen in derselben Stellung.

zu (4)

$$\begin{aligned} 2 \cdot x + 3 &= 9 && /-3 \\ 2 \cdot x + 3 - 3 &= 9 - 3 \\ 2 \cdot x &= 6 && /:2 \\ \tfrac{2 \cdot x}{2} &= \tfrac{6}{2} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

auf beiden Seiten 3 subtrahieren
dann beide Seiten durch 2 dividieren

Anmerkung:
Statt der obigen Darstellung mit den beiden Pfeilen (welche eigentlich die bessere ist) wird meist die nebenstehende verwendet, bei der die beidseitig identische Operation nach einem Schrägstrich rechts vermerkt wird (aber immer daran denken: auf beiden Seiten!).

zu (5)

$$\begin{aligned} 3 \cdot x - 1 &= 5 + x && /-x \\ 3 \cdot x - 1 - x &= 5 + x - x \\ 2 \cdot x - 1 &= 5 && /+1 \\ 2 \cdot x - 1 + 1 &= 5 + 1 \\ 2 \cdot x &= 6 && /:2 \\ \tfrac{2 \cdot x}{2} &= \tfrac{6}{2} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Umformungen einer Aussageform, welche die Lösungsmenge nicht verändern, nennt man Äquivalenzumformungen. Mit dem Wissen um solche Umformungen können wir komplizierte Aussageformen in die einfachste der Form $x = a$ (oder $x < a$ oder $x \leq a$ oder $x > a$ oder $x \geq a$) bringen, um die Lösungsmenge zu bestimmen.

Äquivalenzumformungen (und was es dabei noch zu beachten gilt):

- auf beiden Seiten dieselbe Zahl addieren (oder subtrahieren)
- beide Seiten mit derselben Zahl multiplizieren
  Diese Zahl muss aber ungleich Null sein (denn sonst wird z. B. aus einer Gleichung die Aussage 0=0). Das klingt selbstverständlich, aber Achtung: Würden wir z. B. beide Seiten einer Gleichung mit $x + 3$ multiplizieren, dann müssen wir ausschließen, dass $x = -3$ ist, denn dann hätten wir mit Null multipliziert.
- beide Seiten durch dieselbe Zahl dividieren
  Diese Zahl muss ungleich Null sein, denn durch Null kann man nicht dividieren. Ist dieser Divisor ein Term, so darf dessen Wert nicht Null werden (z. B. beide Seiten durch $x - 3$ dividieren, da muss $x \neq 3$ sein).

Bei Ungleichungen gibt es noch einen wichtigen Sachverhalt zu beachten:
Die wahre Aussage $4 < 5$ bleibt wahr, wenn man beide Seiten mit einer Zahl > 0 multipliziert (oder durch eine Zahl > 0 dividiert); z. B. wird aus $4 < 5$ bei Multiplikation beider Seiten mit $+3$ die wahre Aussage $12 < 15$. Multipliziert man aber mit

-3, dann entstünde $-12 < -15$, und das ist eine falsche Aussage. Das liegt daran, dass negative Zahlen eine andere Orientierung haben, dort ist die Zahl mit dem größeren Betrag die kleinere, während bei den positiven Zahlen jene mit dem größeren Betrag auch die größere ist (wenn $a < b$, dann ist $-a > -b$ und umgekehrt, das gilt für alle $a, b \in \mathbb{Q}$).
Deswegen muss, um bei Ungleichungen den Wahrheitswert zu erhalten, das Zeichen umgekehrt werden, wenn man mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine solche dividiert.
Also müssen wir ergänzen …

- beide Seiten mit derselben Zahl ($\neq 0$) multiplizieren oder durch dieselbe Zahl ($\neq 0$) dividieren;
  ist diese Zahl negativ, so muss bei Ungleichungen das Zeichen umgekehrt werden.