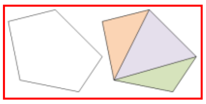
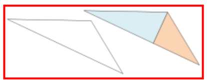
Dreiecke – immer wieder

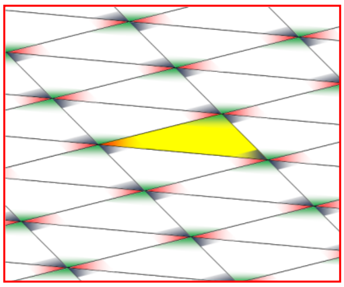
In der Geometrie musst du dich immer wieder mit Dreiecken beschäftigen. Du lernst etwas über die Eigenschaften (Seitenlängen, Winkelgrößen, Höhen, …) von Dreiecken und besonderen Dreiecken, du musst sie mit bestimmten Vorgaben konstruieren können, du lernst sie zu vergleichen und musst wissen, unter welchen Bedingungen sie kongruent (deckungsgleich) sind. Du erfährst, wie man Streckenlängen in Dreiecken berechnen kann, und schlussendlich kannst du dann auch zu bekannten Seitenlängen die Größe der Winkel (und umgekehrt) bestimmen.





Aber warum sind Dreiecke derart wichtig?

Weil man jedes Vieleck in Dreiecke zerlegen kann; beherrscht man Dreiecke, so kann man damit auch Vielecke konstruieren und berechnen.
Genau genommen muss man gar nur rechtwinklige Dreiecke beherrschen, da jedes Dreieck sich wieder in rechtwinklige Dreiecke zerlegen lässt.



Im Folgenden ist einiges Wissen über Dreiecke zusammengestellt.

- Die Summe der Größen der Innenwinkel beträgt in jedem Dreieck 180°.
  Was viele nicht wissen: Deswegen (weil die drei Innenwinkel aneinandergefügt eine Gerade ergeben) kann man die Ebene mit jedem beliebigen Dreieck lückenlos parkettieren. Probiere es aus: Nimm ein beliebiges Dreieck, klone es, und füge die Klone aneinander.

- Ein Dreieck ist ein stabiles Gebilde, weil es mit drei Seiten eindeutig bestimmt ist.
  Dies im Unterschied zum Viereck, das mit vier Seiten nicht eindeutig ist. Deswegen ist ein Hochregal überaus wacklig, es steht aber fest, wenn es mit einer diagonalen Strebe versehen wird.

- Um ein Dreieck eindeutig zu bestimmen, müssen festgelegt sein
  - drei Seiten *oder*
  - zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel *oder*
  - zwei Seiten und der der größeren Seite gegenüberliegende Winkel *oder*
  - eine Seite und die beiden an dieser Seite liegenden Winkel

  Dreiecke, die derart übereinstimmen, stimmen in all ihren Stücken überein, man sagt: sie sind kongruent (deckungsgleich, identisch). Diese vier Bedingungen für Kongruenz werden „Kongruenzsätze" genannt und mit Kürzeln adressiert: sss, sws, SsW, wsw.

- In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seitenlängen größer als die Länge der dritten Seite.
  $$a + b > c, \qquad b + c > a, \qquad a + c > b$$
  Es gibt z. B. kein Dreieck mit $a = 2\ cm, b = 3\ cm\ und\ c = 6\ cm$

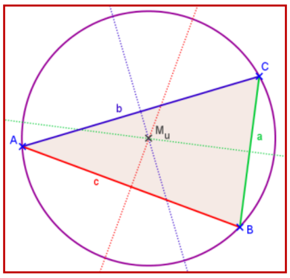
- *Zur Abwechslung mal eine Aussage auf Neudeutsch:*
  Das Ranking der Seiten (Länge) entspricht dem Ranking der jeweils gegenüberliegenden Winkel (Größe).

- Die Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten schneiden sich in einem Punkt.
  Dies ist der Mittelpunkt des Umkreises, den jedes Dreieck besitzt.

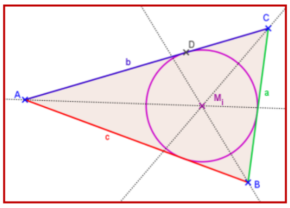
- Die Winkelhalbierenden der Dreieckswinkel schneiden sich in einem Punkt.
  Dies ist der Mittelpunkt des Inkreises, den jedes Dreieck besitzt.

- Die Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.

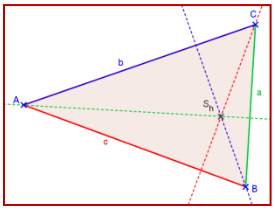
- Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.
  Dieser Punkt ist der Schwerpunkt des Dreiecks. In diesem Punkt kannst du das Dreieck balancieren.



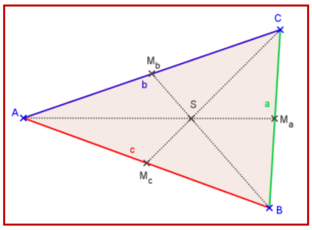
Umkreis



Inkreis



Höhenschnittpunkt



Schwerpunkt

Und jetzt eine kleine Denkübung zu der Frage „Wieso schneiden sich die drei Mittelsenkrechten der Dreiecksseiten in einem Punkt?"
Alle Punkte auf der Mittelsenkrechten m_b der Strecke b sind von A und C gleich weit entfernt, alle Punkte auf der Mittelsenkrechten m_a der Strecke a sind von B und C gleich weit entfernt. Der Schnittpunkt M_u dieser beiden Mittelsenkrechten ist also von allen drei Punkten A, B und C gleich weit entfernt. Alle Punkte, die von A und B gleichweit entfernt sind, müssen auf der Mittelsenkrechten m_c liegen, also verläuft diese Mittelsenkrechte ebenfalls durch den Schnittpunkt M_u.
Versuche eine ähnliche Argumentation für den Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.
Und überlege oder recherchiere: Welche der besonderen Punkte liegen immer innerhalb des Kreises, welche können auch außerhalb liegen?

- Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist $A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$; g ist ein Seite, h_g die zugehörige Höhe.

Dreiecke seien etwas furchtbar Langweiliges (so wie sie in der Schule behandelt werden), behauptet Walter Fendt. Er hat ein „Dreiecks-Labor“ kreiert, das einen Blick in die faszinierende Welt der Dreiecke eröffnen soll: http://www.walter-fendt.de/m14d/dl/index.html, 18.03.2010.

Du wirst dort entdecken, dass Dreiecke wirklich faszinierend sein können.