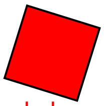
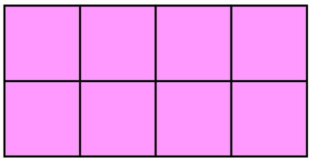
Messen – was ist das?

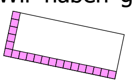
Flächeninhalte bestimmen



Um Flächeninhalte von Rechtecken vergleichen zu können, haben wir uns entschieden, die Rechtecke mit „Einheitsquadraten" mit der Seitenlänge 1 (Millimeterquadrate, Zentimeterquadrate, Dezimeterquadrate, ...) auszulegen, zu parkettieren.
Die Flächeninhalte dieser Einheitsquadrate haben wir 1 mm², 1 cm², 1 dm², ... genannt.

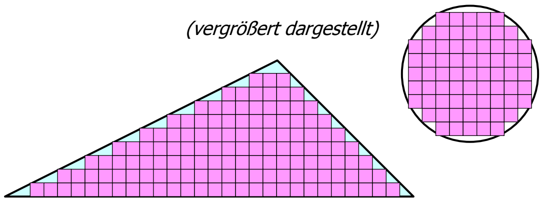


Der Flächeninhalt des Rechtecks ist so groß wie $2 \cdot 4 = 8$ Zentimeterquadrate, also $A = 2 \cdot 4\ cm^2 = 8\ cm^2$.
Wir haben gesehen, dass wir die Rechtecke nicht vollständig, sondern nur längs der Seiten auslegen müssen, um den Flächeninhalt zu bestimmen.



Der Flächeninhalt des Rechtecks ist so groß wie $6 \cdot 15 = 90$ Millimeterquadrate, also $A = 6 \cdot 15\ mm^2 = 90\ mm^2$.

(vergrößert dargestellt)



Wir wussten, dass das nur bei rechtwinkligen Figuren gut funktioniert, und dass wir bei anderen Figuren mit dem Auslegen mit Quadraten Probleme bekommen würden, besonders bei krummlinig begrenzten Flächen wie Kreisen.

Die Strategie zur Lösung dieses Problems bei geradlinig berandeten Figuren sieht so aus, dass wir versuchen, die Figur durch Zerlegen und Zusammenfügen in ein parkettierbares Rechteck verwandeln, das denselben Flächeninhalt hat (die Flächeninhaltsgleichheit der Ausgangsfigur und des entstehenden Rechtecks müssen wir nachweisen, damit wir keinen Fehler machen).
Später, wenn wir genügend Figuren beherrschen, können wir neue Figuren statt in ein Rechteck auch in bereits bekannte verwandeln.

Beispiel „Dreieck"

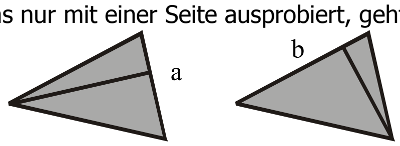
Um das Dreieck in ein flächeninhaltsgleiches Rechteck zu verwandeln, verwenden wir eine Seite und die Höhe, die auf dieser Seite senkrecht steht (z. B. c und h_c). Wir finden verschiedene Möglichkeiten:

$A = \frac{c}{2} \cdot h_c$ $\quad A = c \cdot \frac{h_c}{2}$ $\quad A = \frac{c \cdot h_c}{2}$

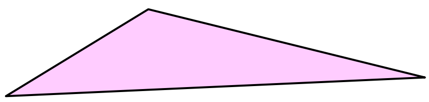
Alle drei Terme sind gleich, und wir merken uns „allgemein":
Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus der Länge einer Seite und der Länge der zugehörigen Höhe.

Als Formel: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$ (g steht für „Grundseite")

Aber Achtung: Haben wir einen Fehler gemacht?
Wir haben das nur mit einer Seite ausprobiert, geht das auch mit den anderen, also mit egal welcher?



Und noch mal Achtung:
Wir haben das für ein spezielles Dreieck, nämlich ein spitzwinkliges, durchgeführt.
Was aber ist, wenn das Dreieck stumpfwinklig ist? Dürfen wir dann auch unsere „Formel" benutzen, egal welche Seite wir als Grundseite nehmen?
Beachte: zwei Höhen liegen außerhalb!



Beim Kreis werden wir später erhebliche Probleme haben; dessen Verwandlung in ein flächeninhaltsgleiches Quadrat ist eine ungelöste Aufgabe der Mathematik ist („Quadratur des Kreises"). Hier werden wir uns dann mit ungefähren Lösungen (Näherungslösungen) behelfen müssen.

Vielleicht hilft dann eine andere „Technik" weiter, indem wir die unbekannte Figur innen auslegen und überdeckend auslegen (in der Computersprache: „Pixeln"). Dann erhalten wir zwei Grenzwerte (ein „Intervall"), einer ist kleiner und der andere größer als der gesuchte Flächeninhalt. Das Ergebnis können wir verbessern, indem wir mit immer kleineren Quadraten das Auslegen verfeinern.