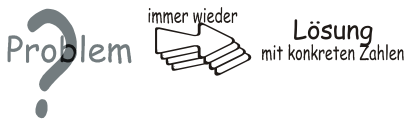
Formeln – was ist das?

In der Mathematik beschäftigen wir uns sehr häufig damit, Lösungen für irgendwelche Probleme zu finden, z. B. den Flächeninhalt einer Figur zu bestimmen, die Länge einer Strecke zu berechnen, eine gemischt-quadratische Gleichung rechnerisch zu lösen, die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems zu finden usf.

Wir geben uns aber nicht damit zufrieden, in einem konkreten Beispiel etwas berechnet zu haben. Um in Zukunft Arbeit zu sparen, wenn uns dasselbe Problem wieder begegnet, nur mit anderen Zahlen, lösen wir das Problem einmal allgemein, also nicht mit konkreten Zahlen, sondern mit Platzhaltern (was meist etwas komplizierter und schwieriger ist als nur mit Zahlen). Wir erhalten eine „Lösung", die unsere Platzhalter enthält, das ist unsere „Formel". Diese lernen wir auswendig oder schreiben sie in eine Formelsammlung. Begegnet uns unser Problem erneut, führen wir nicht mehr den ausführlichen Rechenweg durch, sondern holen unsere Formel her und setzen dort in die eigentlich schon fertige Lösung die konkreten Zahlen für die Platzhalter ein – fertig! Wir müssen noch nicht einmal mehr wissen, wie die Formel zustande kam.

Aber wir müssen aufpassen: Vielleicht standen unsere Platzhalter stellvertretend für natürliche Zahlen, dann dürfen wir in unsere Formel auch nur solche einsetzen und sie nicht verwenden mit negativen Zahlen oder Bruchzahlen. Deswegen müssen bei vielen Formeln die Bedingungen für die Platzhalter mit angegeben werden.



Beispiel:

statt immer wieder mit
mit konkreten Zahlen

$x^2 - 4x - 21 = 0$

$x^2 - 4x + 4 - 4 - 21 = 0$

$(x-2)^2 - 25 = 0$

$[(x-2)+5] \cdot [(x-2)-5] = 0$

$(x+3) \cdot (x-7) = 0$

$x + 3 = 0 \quad \text{oder} \quad x - 7 = 0$

$x = -3 \quad \text{oder} \quad x = 7$

$\mathbb{L} = \{-3; 7\}$

einmal
mit Platzhaltern

$x^2 + px + q = 0$

$x^2 + px + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = 0$

$(x + \frac{p}{2})^2 - (\frac{p^2}{4} - q) = 0$

$[(x + \frac{p}{2}) + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}] \cdot [(x + \frac{p}{2}) - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}] = 0$

$x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0 \quad \text{oder} \quad x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = 0$

$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{oder} \quad x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

$\mathbb{L} = \left\{ -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \,;\, -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \right\}$

das lässt sich besser merken als

$x_{1.2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$; $p, q \in \mathbb{Q}$

… das ist unsere „Formel"

und in Zukunft
viel einfacher

$x^2 - 4x - 21 = 0$

$p = -4$, $q = -21$

einsetzen in die Formel

$x_{1.2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

$x_{1.2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} - (-21)}$

$x_{1.2} = 2 \pm \sqrt{25}$

$x_1 = 7$; $x_2 = -3$

$\mathbb{L} = \{7 ; -3\}$

… fertig!