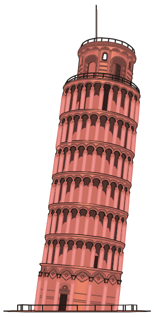
# Rechenoperationen – Gefühl für Zahlen und Operationen, was ist das?



Während deiner Schulzeit lernst du sehr viele Zahlen und Rechenoperationen kennen. Du musst aufpassen, dass du nicht den Überblick verlierst. Denn dann gerät dein Wissen aus dem Lot wie der schiefe Turm von Pisa.
Mit dieser Seite kannst du dir einen neuen Überblick verschaffen.
Damit du dich nicht wunderst, dass hier nur von „Summen“ und „Produkten“ die Rede ist (und nicht von Differenzen und Quotienten):
Jede Differenz kann man in eine Summe verwandeln, z. B. $-x-5=(-x)-(+5)=(-x)+(-5)$; das hat den Vorteil, dass wir uns nur Rechengesetze für die Addition merken müssen und nicht noch mal extra Gesetze für die Subtraktion. Und man kann auch jede Division in eine Multiplikation verwandeln.
Zur Veranschaulichung sind Summen als Strecken und Produkte als Flächeninhalte von Rechtecken dargestellt.

---

**Eine Summe wird multipliziert, indem man jeden Summanden multipliziert (und die Produkte addiert).**

$(10+2)\cdot 3=10\cdot 3+2\cdot 3=30+6=36$

allgemein: $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$

Wir wenden das an bei fast jeder Multiplikation im Kopf.

**Eine Summe wird dividiert, indem man jeden Summanden dividiert (und die Quotienten addiert).**

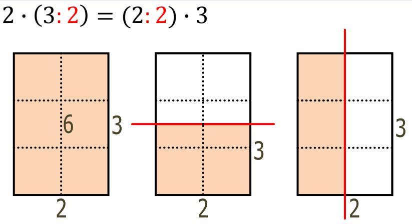
▶ Zeichne selbst eine Veranschaulichung mit Strecken.

Beispiel: Wenn du wissen willst, ob 1001 durch 7 teilbar ist, dann zerlege in geeignete Summanden

$1001:7=(700+280+21):7=100+40+3=143$

**Ein Produkt wird dividiert, indem man einen der Faktoren dividiert.**

$(2\cdot 3):2=2\cdot(3:2)=(2:2)\cdot 3$




Um die Fläche durch 2 zu teilen, darf man nur eine Seite teilen; wenn man jeden der beiden Faktoren durch 2 teilen würde, dann hätte man die Fläche geviertelt statt halbiert.

Allgemein: $(a\cdot b):c=a\cdot(b:c)=(a:c)\cdot b$

---

**Umgekehrt kann man durch eine Summe nur insgesamt dividieren, das darf man nicht summandenweise machen.**

$a:(b+c)\neq a:b+a:c$

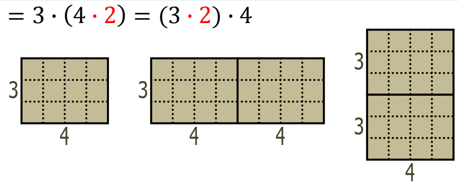
Beispiel:

$60:(2+3)\neq 60:2+60:3=30+20=50$

$60:(2+3)=60:5=12$

**Ein Produkt wird multipliziert, indem man einen der Faktoren multipliziert.**

$(3\cdot 4)\cdot 2=3\cdot(4\cdot 2)=(3\cdot 2)\cdot 4$




Allgemein: $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot c)\cdot b$

---

**Eine Summe kann man nicht quadrieren, indem man jeden Summanden quadriert.**

$12^2=144$; schreibt man 12 als 10+2, also $(10+2)^2$ und rechnet $10^2+2^2=100+4=104$, dann hat man offenbar etwas falsch gemacht.

Zeichne selbst eine Veranschaulichung, indem du den Flächeninhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge 10 + 2 bestimmst: $(10+2)^2=10^2+2\cdot 10\cdot 2+2^2$

allgemein: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

**Ein Produkt wird quadriert, indem man jeden Faktor quadriert.**

Beispiel:

$(5\cdot 2)^2=5\cdot 2\cdot 5\cdot 2=5\cdot 5\cdot 2\cdot 2=5^2\cdot 5^2$

Allgemein:

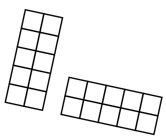
$$(a\cdot b)^n=\underbrace{a\cdot b\ldots\cdot a\cdot b}_{n}=\underbrace{a\ldots\cdot a}_{n}\cdot\underbrace{b\ldots\cdot b}_{n}=a^n\cdot b^n$$

---

Warum sagt man zu den Zahlen in einem Produkt mal „Multiplikand“ und „Multiplikator“ (verwendet also verschiedene Namen) und mal „Faktoren“ (also denselben Namen)?

Die Multiplikation haben wir gelernt als fortgesetzte Addition gleicher Summanden (ebenso wie später das Potenzieren als fortgesetzte Multiplikation gleicher Faktoren).

$5\cdot 2=5+5$, aber $2\cdot 5=2+2+2+2+2$, und das ist zunächst etwas völlig Verschiedenes.



Wir haben aber dann herausgefunden, dass das dasselbe ist, die Multiplikation also kommutativ ist. Es ist also dasselbe, a-mal den Summanden b schreiben wie b-mal den Summanden a. Deswegen mussten wir nicht mehr unterscheiden zwischen den beiden Zahlen, konnten ihnen denselben Namen geben, nämlich „Faktor“.
Die verschiedenen Namen „Minuend“ und „Subtrahend“ bei einer Subtraktion und „Dividend“ und „Divisor“ bei einer Division signalisieren, dass diese Operationen nicht kommutativ sind. Gleiche Namen „Faktoren“ bei Produkten und „Summanden“ bei Summen sagen dir, dass die Operationen kommutativ sind.

| | |
|---|---|
| *Eine Summe wird dividiert, indem man jeden Summanden dividiert (und die Quotienten addiert)… hast du weiter oben bereits gesehen!*<br><br>Dieser Sachverhalt kommt auch in anderen Bereichen vor, z. B. bei der Bruchrechnung, beim Kürzen, wenn im Zähler eine Summe steht.<br>Hans soll den Term $\frac{4 \cdot x + 3}{8}$ kürzen; sein Blick fällt auf die Zahlen 4 und 8, und schon macht er …<br>$\boxed{\frac{\cancel{4}^{1} \cdot x + 3}{2\cancel{8}}}$ … es falsch.<br>Beim Kürzen muss er Zähler und Nenner durch dieselbe Zahl (4) dividieren. Im Zähler steht aber eine Summe, und um diese zu dividieren, muss er <u>jeden</u> Summanden dividieren, also $\frac{4 \cdot x + 3}{8} =_{Kürzen\ mit\ 4} \frac{1 \cdot x + 0{,}75}{2}$ .<br>Es gibt den Spruch „Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen“ – ein dummer Spruch, denn mit Dummheit hat das nichts zu tun, sondern mit Nichtwissen um Rechenoperationen. | An den bisherigen Sachverhalten und Beispielen erkennst du, dass es sehr wichtig ist, die Art eines Terms zu bestimmen (ist der Term eine Summe/Differenz oder ein Produkt/Quotient?). Ganz so einfach ist das nicht, oft kommen in einem Term alle möglichen Rechenzeichen vor (wobei gar das Rechenzeichen „·“ oft weggelassen ist).<br>Die Art des Terms wird bestimmt von jener Rechenoperation, die <u>zuletzt</u> auszuführen ist; z. B.<br>$(2 \cdot x + 3) \cdot 5 - \frac{x}{2}$ ist eine Differenz.<br><br>Du kannst selbst schwierige Terme erstellen, indem du einen einfachen „Anfangsterm“ zunehmend komplizierter machst, z. B.:<br>$\boxed{\begin{array}{l} 15 - 12 \\ 3 \cdot 5 - 12 \\ 3 \cdot 5 - (2^3 + 4) \\ \frac{21}{7} \cdot 5 - (2^3 + 4) \\ \frac{21}{7} \cdot 5 - (2^3 + 20:5) \\ \frac{21}{7} \cdot 5 - (2^3 + 20:[12 - 7]) \end{array}}$ |