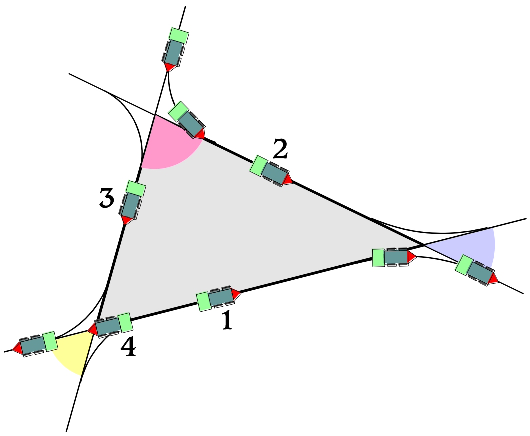
Gedanken zur Lernsequenz

Die Winkelsumme im Dreieck



In diesem Beitrag werden didaktisch-methodische Elemente der Lernsequenz „Winkel“ und „Winkelsumme im Dreieck“ thematisiert. Im Mittelpunkt steht eine Stunde, in der die Winkelsumme schülernah auf der Erfahrungswelt der Lernenden „abgeleitet“ und argumentativ belegt wird mit Hilfe des Umlaufens eines Dreiecks.

Ausführungen zur Thematik

Die Winkel an Parallelen und die Winkelsumme im Dreieck nehmen eine zentrale Stellung ein innerhalb des „Lehrgangs“ Geometrie. Es schließen sich zum Beispiel an die (Winkel-)Eigenschaften besonderer Dreiecke (rechtwinklig[1], gleichseitig, gleichschenklig, symmetrisch; $a < b \leftrightarrow \alpha < \beta; a + b > c; \ldots$), von Vierecken („Haus der Vierecke“) bis hin zu n-Ecken, der Satz des Thales und seine Umkehrung, der Zusammenhang zwischen Mittelpunktswinkel und Umfangswinkel (als Verallgemeinerung), Zusammenhänge zwischen Senkrechten[2], die Kongruenzsätze usf.

In der Schulgeometrie spielen Dreiecke (als zentrale Figur[3]) eine wichtige Rolle: die konstruktive und rechnerische Beherrschung dieser Figur wird Zug um Zug vorangetrieben; Winkelhalbierende und Mittelsenkrechte (und Seitenhalbierende), In- und Umkreis (und Schwerpunkt), Kongruenzen und Dreieckskonstruktion, Ähnlichkeit, Höhen und Flächeninhalt, Sätze am rechtwinkligen Dreieck (Höhensatz, Kathetensatz, Satz des Pythagoras) wären hier zu nennen; in der Trigonometrie wird schließlich die letzte verbliebene „Lücke“ im Wissen geschlossen, nämlich Seitenlängen aus Winkeln zu berechnen und umgekehrt. Und bis ins 10. Schuljahr wird die Winkelsumme immer wieder zu Berechnungen und als Beweiselement herangezogen. Konstruktionsbeschreibungen wiederum sind wichtige Elemente in der Entwicklung algorithmischen Denkens.

Die unbestrittene Bedeutung der „Winkelsumme im Dreieck“ macht es erforderlich – trotz des vordergründig sehr einfachen Sachverhaltes, den Schülerinnen und Schüler im Allgemeinen gut beherrschen und der jederzeit verfügbar scheint –, mit Sorgfalt vorzugehen und Akribie walten zu lassen. Investitionen an dieser Stelle werden sich mit Sicherheit später auszahlen. In der pädagogischen Literatur wird in den letzten Jahren der Ruf nach der „didaktischen Langsamkeit“ (anstelle von Tempo und Lehrplanstress) laut, auf Langfristigkeit angelegte inhaltliche und fachmethodische Kontinua sind erforderlich statt kurzlebiger bruchstückhafter Einzelteile, und häufig kommt man in der Mathematik viel zu schnell zu „Formel-Automatismen“, die sich bei Bedarf und näherer Betrachtung als inhaltsleere Hülsen entpuppen. Die auch und besonders im Mathematikunterricht vielfach zu beobachtende Vorgehensweise, einen Sachverhalt zu „erklären“[4] und dann anschließend mit steigerndem Schwierigkeitsgrad zu „üben“, muss durchbrochen werden zu Gunsten von auf Schülerselbsttätigkeit und -initiative setzenden Methoden. Allerdings muss klar gesagt werden, dass es mit alternativen Methoden (um der Methoden willen) allein nicht getan ist, auch die Didaktik muss „stimmen“, muss im Sinne genetischer Prinzipien contra „Mathematik als Fertigprodukt“ den Lernenden die Chance lassen, eigene Lernwege zu gehen.

Es ist schon „Tradition“ im Geometrie-Unterricht (die sich in Lehrplänen und Schulbüchern abbildet), nach der Einführung des Winkelbegriffs Neben- und Scheitelwinkel zu betrachten und dann Stufen- und Wechselwinkel, anschließend mit den jetzt vorhandenen Voraussetzungen die Winkelsumme im Dreieck anzugehen (und ggf. mit Hilfe der Wechselwinkeleigenschaft zu beweisen). Die didaktische Konstruktion „was man später braucht muss vorher behandelt werden“, in Schulbüchern ein fast unabdingbares Konzept für die Anordnung der Inhalte, findet sich leider allzu oft auch im Unterricht wieder (die Frage der Schülerinnen und Schüler „Warum machen wir das?“ wird dann mit „Weil wir das später brauchen“ beantwortet), sie ist aber selten genetisch. Sehr viel mehr im Sinne von Martin Wagenschein wäre es, die Frage nach der Summe der Innenwinkel im Dreieck direkt anzugehen, und die Wechselwinkeleigenschaft als „Nebenprodukt“ (Teilproblem) auf dem Weg zu einer Lösung des (Haupt-)Problems zu erhalten.

---

1 traditionell lernen die Schülerinnen und Schüler, dass es spitzwinklige, rechtwinklige und stumpfwinklige Dreiecke gibt, das gleichwinklige Dreieck oder auch das paarwinklige Dreieck hätten in der Denklogik der Lernenden durchaus Platz, kommen aber im fertigen Begriffsgebäude der Mathematik (meines Wissens) nicht vor. *[Zum Problem des Begriffslernens und der in der (Schul-)Mathematik existenten Begrifflichkeiten empfehle ich meine Ausführungen zu diesem Thema auf meiner Homepage]*

2 z. B. Wenn die Schenkel zweier Winkel paarweise senkrecht stehen, dann sind die Winkel gleich groß oder supplementär (= ergeben zusammen 180°).

3 Es sollte den Schülerinnen und Schülern schon bewusst werden, warum Dreiecke (resp. rechtwinklige Dreiecke) von immenser Bedeutung sind: Jede gerade berandete Figur lässt sich in Teildreiecke zerlegen, und wenn wir die Teildreiecke „beherrschen“ (berechnen können, konstruieren können), beherrschen wir die Figur. Hierbei wird auch klar, warum der Kreis „aus der Reihe tanzt“, wohl besondere Probleme bereiten wird.

4 ein „guter Lehrer“ ist dann derjenige, welcher „gut erklären kann“; dieses „Gut-erklären-können“ ist aber nicht nur auf „verständliche Unterweisung“ [und damit relative Lehrerdominanz] gerichtet, das alles Entscheidende ist die Fähigkeit der Lehrkraft, anzuknüpfen an die real existente Denkwelt der Lernenden und sich einzulassen auf deren Niederungen].

Winkel (und Dreiecke) sind nicht nur in der Mathematik von fundamentaler Bedeutung, sie sind auch in unserer Lebenswelt vielfach präsent. Winkel gibt es in der Natur (z. B. in Form von Steigungen im Gelände, ...) und in der von Menschen geschaffenen Welt (z. B. an Gebäuden, Dächern, Fenstern, ..., Gradnetz der Erde, ...), als „starre“ Gebilde und Teile von Figuren, Winkel existieren aber auch in dynamischer Form, als Richtungs- und Kursänderung, zur Beschreibung von Wegen und Bewegungen, als bestimmendes Moment von Kräften (Vektoren), sie sind von eklatanter Bedeutung in der Astronomie[5], der Navigation, sie bestimmen unser Leben (z. B. via Neigungswinkel von 23,5° der Erdachse, Einfallswinkel des Sonnenlichts), sie sind ökologisch bedeutsam in der Solartechnologie (z. B. optimale Neigungswinkel von Solarzellen im jahreszeitlichen Mittel) – die vielfältigen Erscheinungsformen aufzuzählen ist nicht möglich. Und Winkel zu beherrschen, ist in vielen Lebensbereichen (und Berufsfeldern) ein unabdingbares Muss.

Und wenn im Mathematikunterricht Winkel und Winkelmessung „eingeführt“ werden, dann darf dieses Phänomen nicht reduziert werden auf die Drehung einer Halbgeraden im mathematisch positiven oder negativen Sinne, auf Scheitel und Schenkel und griechische Buchstaben, sondern es muss etwas sichtbar und für die Schülerinnen und Schüler wahrnehmbar werden davon, dass Winkel durchaus „lebendig“ sind und dass die Mathematik hier eine dienende Funktion hat, nämlich die Winkel unserer Welt beherrschen zu lernen.

Die Schülerinnen und Schüler haben in der Regel in Erdkunde bereits das Gradnetz behandelt, dies wurde aber (verständlicherweise) nicht so gemacht, dass darauf Bezug genommen werden kann. Meist wird das Gradnetz im Anfangsunterricht thematisiert, aber wegen der fehlenden mathematischen Voraussetzungen (Winkelmaß) auf einer naiv-anschaulichen Basis (15° nördlicher Breite ist dann einfach der „Name“ eines Breitenkreises und nicht der Winkel zwischen Erdmittelpunkt sowie Äquatorpunkt und Breitenkreispunkt [auf demselben Längenkreis]).

<u>Exkurs</u>:
Das Stichwort „Grad“ gibt Anlass, einmal die Schülerinnen und Schüler in den Blick zu nehmen, die in Erdkunde soeben das Gradnetz der Erde besichtigen, sodann in Naturwissenschaften sich mit Temperaturmessung und „Grad Celcius“ beschäftigen und dann in Mathematik Winkel und Winkelmessung thematisieren, womöglich noch in drei aufeinander folgenden Stunden; den dann fast zwangsläufigen „Denksalat“ im Kopf der Lernenden zu vermeiden, braucht im Sinne fächerverbindenden Unterrichts das Wissen der Lehrkräfte umeinander und Strategien zur Minimierung der verständlichen Irritationen bei den Lernenden.
Ansonsten wäre die sachgerechte Begriffsbildung bei den Lernenden zum Scheitern verurteilt.

Sachanalyse

Was ist zuerst da — Huhn oder Ei?

> Bemerkung. Die Lehre von den parallelen Linien ist im Werke „Elemente“ des griechischen Geometers Euklid (300 v. Chr.) bereits einwandfrei behandelt. Gewisse Schwierigkeiten, die beim verstandesmäßigen Aufbau der Parallelenlehre auftreten, haben aber die Mathematiker bis in die neueste Zeit beschäftigt und erst im 19. Jahrhundert restlose Klärung gefunden. In der Einleitung zum 5. Abschnitt wird die Parallelenlehre nochmals ohne Zuhilfenahme der Rechtecksfigur dargestellt.

aus: Lengauer/Goller. Ebene Geometrie
Kösel und Pustet Verlag München o. J. (ca. 1915)

Diese nicht ohne Grund provokativ formulierte Frage hat durchaus einen ernsten Hintergrund, berührt sie doch die Grundfesten der Mathematik überhaupt und auch und insbesondere der Schulmathematik. Wie das „Gebäude“ der logischen Konstrukte aufgebaut ist, was als unbewiesene (und unbeweisbare) Grundannahme und -tatsache (Axiom) gesehen wird und was man in welcher Abfolge hieraus sukzessive deduziert, ist eine ganz entscheidende Frage hinsichtlich des Verständnisses des Wesens der Mathematik. Dabei ist es noch nicht mal so, dass diese Konstrukte eindeutig sind (was viele von der Mathematik naiv annehmen), sondern ganz im Gegenteil sehr viele Variationen möglich sind. Nicht von ungefähr gibt es z. B. zum Satz des Pythagoras bis dato ca. 360 verschiedene Beweise. So gibt es auch von den Winkeln an Parallelen bis hin zur Winkelsumme im Dreieck eine Vielzahl unterschiedlicher logischer Schlussketten. In dem oben zitierten Textausschnitt ist der Sachverhalt angesprochen, dass die Sätze über Winkel an Parallelen (Stufenwinkel, Wechselwinkel, Ergänzungswinkel) zum einen aus den Eigenschaften eines Rechtecks (genauer der Kongruenz der Teildreiecke und daraus folgend der Kongruenz der Winkel) abgeleitet werden können, zum anderen aber auch ohne diese bewiesen werden können (bzw. müssen, wenn die Kongruenz noch nicht vorausgesetzt werden darf). Hat man, als eine weitere Alternative, vor der Betrachtung der Winkel an Parallelen die Punktspie-

---

[5] Aus dem Winkel $\alpha \approx 89°51'$ zwischen Sonne und Mond (bei Halbmond) ergibt sich, dass die Sonne ca. 390-mal so weit von der Erde entfernt ist wie der Mond – eine schon 2000 Jahre alte Erkenntnis (Aristarch von Samos).
Quelle: Schnittpunkt RLP Band 8.

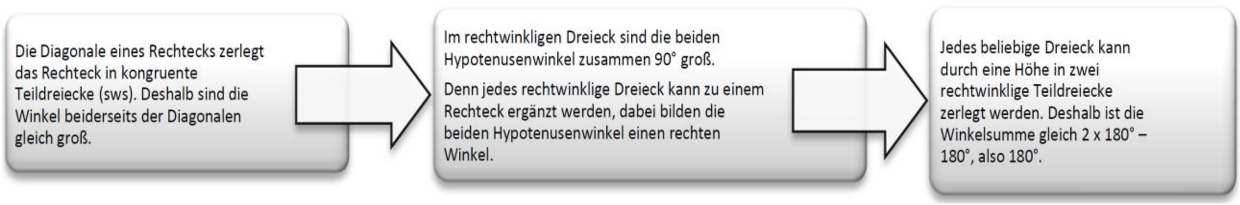
gelung behandelt, so lassen sich aus der Punktsymmetrie einer jeden „Z-Figur“ die Winkelsätze besonders einfach begründen.[6]

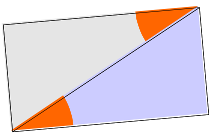
Die Frage nach der Logik im Haus der Mathematik stellt sich in der Schule in besonderer Weise. Gegen einen durchgängig logisch konstruierten „Lehrgang“ (für das Verständnis der Lernenden an und für sich unabdingbar, ebenso für die Entwicklung der Fähigkeiten des plausiblen Schließens, des Argumentierens, des Beweisens) gibt es hier nämlich eine Reihe weiterer Hemmnisse, welche sehr oft das „Lernkontinuum“ in erheblicher Weise beeinträchtigen (z. B. mangelnde Stringenz in den Schulbüchern, verschiedene Lernwege und didaktische „Vorlieben“ verschiedener Lehrkräfte, unterschiedliche Interpretation der Lehrpläne). Der bei weitem aber gewichtigste Grund für Störungen im logischen Aufbau ist in der Propädeutik zu sehen, also darin, dass im Anfangsunterricht das logische Schließen des einen aus dem anderen überhaupt nicht intendiert ist oder nicht im Mittelpunkt steht (nicht stehen sollte, nicht stehen darf).

Geht man davon aus, dass jedoch spätestens ab dem 7. Schuljahr das logische Schließen etc. stärker im Blick sein sollte, haben sich bis zu diesem Zeitpunkt bereits eine Vielzahl von unterschiedlichen Bausteinen angesammelt, die in den Kontext eingebunden werden müssen. Allerdings stellt sich die Frage, wie das Verhältnis zwischen mathematisch exakter Folgerung und anschaulicher Plausibilität beschaffen sein soll. Bernd Wurl[7] führt dazu aus: „*Entweder es werden die Fragen der Grundbegriffe und Grundsätze mindestens so ausführlich erörtert, dass den Schülern die Notwendigkeit formaler Deduktion einsichtig gemacht werden kann, oder die naiv-anschauliche Basis und damit das experimentell-induktive ‘Beweis’-Verfahren werden bis zum Schulabschluss beibehalten. Einen Zwischenweg ohne sachlogische Widersprüche gibt es nicht. ... Die anschauliche Darstellung dient dem Entwickeln von Ideen und Beweisansätzen, der Stimulierung mathematischen Denkens und der Verdeutlichung von Zusammenhängen – die saubere mathematische Deduktion erfolgt aber nach klar definierten Vorschriften aus bewiesenen oder axiomatischen vorgegebenen Sätze mit den Mitteln formaler Logik. ... Welchen von beiden Alternativwegen man für den Geometrieunterricht ... einschlägt, hängt von der Zielsetzung des Faches ab*.“ Und an anderer Stelle weiter: „*Wer sich auf die Begründung ‘Das sieht man doch!’ verlässt, irrt selten, denn in der Elementargeometrie* <u>*ist*</u> *es auch fast immer so, wie es* <u>*aussieht*</u>.“

Auch in den z. Zt. auf dem Markt befindlichen Lehrwerken bilden sich diese kontroversen Standpunkte ab. Als ein Extrem finden wir z. B. lapidar: „ ... nennt man Stufenwinkel. Sie sind gleich groß“ – ohne jede Begründung, einfach aus der Anschauung entnommen. Das andere Extrem bildet ein Lehrwerk, wo in Band 7 in systematischer Konsequenz sämtliche Kongruenzabbildungen behandelt werden und in Band 8 (eingebettet in Dreieckskonstruktionen) der Winkelsummensatz via Spiegelung eines Dreiecks an Seitenmitten ($\rightarrow$ Parallelogramme) bewiesen wird (also ohne Stufenwinkel, die erst später betrachtet werden). In anderen Lehrwerken wird ohne jeglichen Begründungsansatz festgestellt „Stufenwinkel und Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß“, oder man findet Feststellungen wie „Diese Aussage ist anschaulich klar“[8]. Wiederum andere Lehrbücher machen den Sachverhalt wenigstens plausibel, indem z. B. die Eigenschaften der Punktspiegelung herangezogen werden.[9]

Logische Schlussketten zur Winkelsumme im Dreieck können z. B. sein:





6 In dem oben zitierten und Anfang dieses Jahrhunderts aufgelegten Buch findet sich übrigens eine interessante Begrifflichkeit, die im Lehrwerk „Schnittpunkt“ des Klett Verlages (Band 8 RLP, S. 70) wieder aufgegriffen wurde. Stufenwinkel werden auch als „F-Winkel“, Wechselwinkel auch als „Z-Winkel“ und Ergänzungswinkel auch als „E-Winkel“ bezeichnet, eine m. E. für Schülerinnen und Schüler recht anschauliche und die Vorstellung stützende Wortwahl, haben die Lernenden doch recht oft erhebliche Schwierigkeiten mit „Winkel, die an verschiedenen Seiten der geschnittenen Gerade und der schneidenden Gerade liegen“ o. ä. Formulierungen.

7 in H. Meschkowski (Hrsg.): Didaktik der Mathematik Band II. Klett Verlag Stuttgart 1972[1], S. 209

8 Wenigstens ein deutliches Signal, dass dies (axiomatisch) der bloßen Anschauung entnommen wird.

9 Es wurde bewusst darauf verzichtet, die jeweiligen Schulbücher expressis verbis zu nennen.

Die Diagonale eines Rechtecks zerlegt das Rechteck in kongruente Teildreiecke (sws). Deshalb sind die Winkel beiderseits der Diagonalen gleich groß.

Werden zwei Geraden von einer dritten geschnitten, so kann die Z-Figur durch Lote zu einem Rechteck ergänzt werden.

Z-Winkel sind also gleich groß.

In jedem beliebigen Dreieck kann man zu irgendeiner Seite eine Parallele durch den gegenüberliegenden Eckpunkt (= 180°) zeichnen.

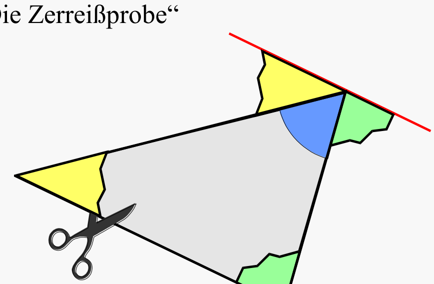
Die zwei entstehenden Teil-Winkel sind als Wechselwinkel gleich den Dreieckswinkeln, deshalb müssen die Innenwinkel zusammen 180° groß sein.

Eine Z-Figur aus zwei Parallelen und einer dritten Geraden ist **punktsymmetrisch** zum Mittelpunkt des Geradenstücks zwischen den Parallelen.

Hieraus können sowohl die Rechteckeigenschaften als auch die Stufenwinkel geschlossen werden, also weiter w. o.

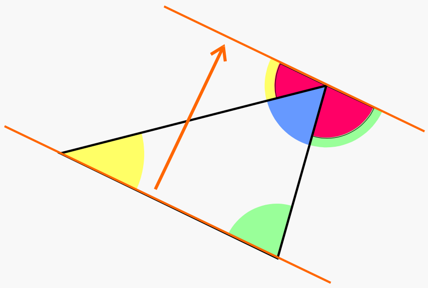
Zur Realisierung im Unterricht gibt es folgende Plausibilitätsbetrachtungen und -operationen:

① „Die Zerreißprobe“



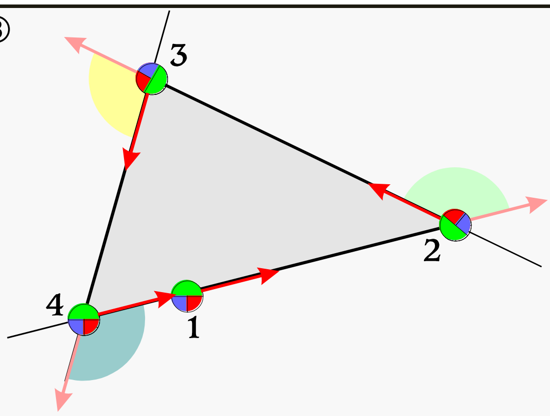
Fügt man zwei Ecken eines beliebigen Dreiecks passgenau an die dritte, so ergeben die drei Winkel stets eine gestreckte Linie.

②



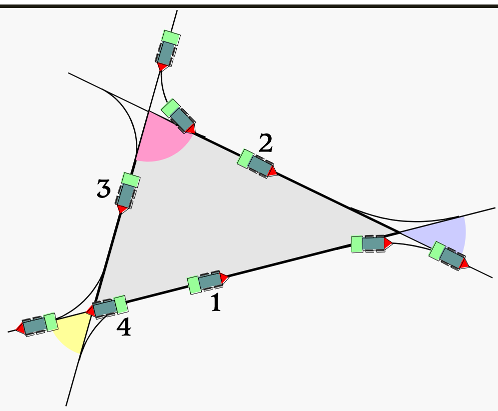
Zeichnet man eine Parallele (= 180°) zu einer Dreiecksseite durch den gegenüberliegenden Eckpunkt, so sind die zwei entstehenden Teilwinkel gleich den Innenwinkeln an dieser Dreiecksseite (Z-Winkel).

③



Umrundet ein Läufer einen Dreieckskurs, so hat er sich nach einer Runde einmal um sich selbst (um 360°) gedreht. Die Drehung in jeder „Ecke“ des Kurses ist gleich dem Außenwinkel an dieser Ecke.

④



Umfährt eine Lokomotive einen dreieckigen Gleiskurs, so steht sie nach einer Runde (um 180° gedreht) in Gegenrichtung.

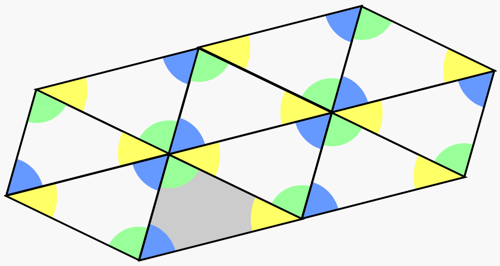
Erläuterungen

ad 1) Weil die Winkelsumme in jedem beliebigen Dreieck 180° beträgt, ergibt jede Aneinanderfügung dreier Innenwinkel einen gestreckten Winkel (eine Gerade). Zusammen mit der Wechselwinkeleigenschaft folgt die Parallelität zu einer Dreiecksseite.

ad 2) Aus der Voraussetzung „Parallele zu einer Dreiecksseite“ ergibt sich mit dem Wechselwinkel-Satz (Z-Winkel) die Winkelsumme im Dreieck als 180°.

ad 3) Bei der Umrundung dreht sich der „Läufer“ in jeder Ecke um den Nebenwinkel des Innenwinkels (= Außenwinkel). Da der Läufer sich ein einziges Mal um seine Achse dreht, sind alle Nebenwinkel zusammen also 360° groß.

⑤

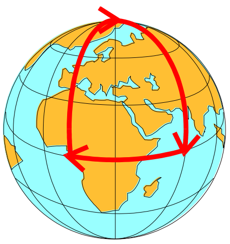


Weil die Innenwinkel zusammen 180° groß sind, lässt sich die Ebene mit jedem beliebigen Dreieck lückenlos parkettieren.

Weil in jeder Ecke der Innenwinkel und sein Nebenwinkel 180° groß sind, ergibt sich in 3 Ecken eine Winkelsumme von 3 · 180° (= 540°). Abzüglich der Außenwinkel von 360° = 2 · 180° verbleiben 1 · 180° für die Summe der Innenwinkel.
Diese Schlussfolgerung ist auf jedes beliebige n-Eck erweiterbar. Bei der Umrundung eines Fünfecks ergeben sich aus 5 Ecken 5 · 180°, abzüglich der konstanten Außenwinkelsumme von 2 · 180° verbleiben für die Innenwinkel 3 · 180° = 540°.
Allgemein ist also die Winkelsumme im n-Eck n · 180° – 2 · 180°. Diese Argumentationskette ist m. E. recht anschaulich.

ad 4) Bei der Umrundung dreht sich die Lokomotive an jeder Weiche abwechselnd um einen Innenwinkel oder um den gleich großen außen liegenden Scheitelwinkel. Die Drehung der Lokomotive bei einem Umlauf von 180° entspricht also der Summe der Innenwinkel.
Kommt eine weitere Ecke hinzu, dreht sich die Lok um weitere 180°. Für die erste Drehung (um 180°) braucht man also drei Ecken, für jede weitere Drehung (um 180°) eine weitere Ecke.
Auch aus dieser Betrachtung folgt anschaulich die Winkelsumme im n-Eck.

ad 5) Parkettierungen der Ebene sind überaus anschauliche Repräsentanten von Winkelsummen, weil sie den Schülerinnen und Schülern in ihrer Umwelt häufig begegnen. Mit jedem beliebigen Dreieck und jedem beliebigen Viereck lässt sich die Ebene lückenlos parkettieren. Mit allgemeinen Fünfecken geht das nicht mehr (sie müssen bestimmte Eigenschaften haben, z.B. $\alpha+\beta+\gamma=180°$)[10].
Besonders interessant sind Parkettierungen mit regelmäßigen n-Ecken (so genannte reguläre oder halbreguläre Parkette).



Dass die Winkelsumme in einem Dreieck stets 180° beträgt, ist keineswegs selbstverständlich, denn es gibt auch „Dreiecke“ mit anderen Winkelsummen: Läuft man auf der Erdkugel längs des Äquators, wendet sich dann um 90° nach Norden, wandert bis zum Pol, dreht sich dort wiederum um 90°, läuft wieder bis zum Äquator und wendet sich wieder um 90°, dann hat man ein Dreieck umrundet, dessen Winkelsumme 270° beträgt.
Dieser Sachverhalt kann an dieser Stelle aber kaum angesprochen werden, um die „Selbstverständlichkeit“ zu erschüttern, dazu fehlen noch zu viele Voraussetzungen.

Curricularer und thematischer Zusammenhang

Die Lernsequenz „Winkelsumme im Dreieck“ ist thematisch eingeordnet in eine wohl etwa 4 Wochen umfassende Unterrichtseinheit „Winkel“. Sofern man zur Behandlung der Winkelsumme nicht den traditionellen Weg über Geradenschnitte wähle, sind nur wenige Voraussetzungen vonnöten, so dass die Erschließung der Winkelsumme (im Dreieck, im n-Eck) relativ früh in dieser Einheit platziert werden kann.

Folgende Kompetenzen sollten im Vorfeld erworben worden sein[11]:

Die Schülerinnen und Schüler …

---

10 bis jetzt hat man vierzehn verschiedene Typen parkettierbarer Fünfecke gefunden (nach einem Ausstellungskatalog von Prof. Dr. Alfred Beutelspacher: Geometrische Modelle – Mathematik zum Anfassen, Uni Gießen, 1994)

11 Es sei angemerkt, dass im Sinne eine „Spiralcurriculums“ Lernziele nicht linear durchlaufen werden, sondern permanent „Begleiter“ durch die gesamte Lernsequenz sind und so eine zunehmende Festigung und Einbettung erfahren.

- kennen die Begriffe Winkel, Scheitel des Winkels, Schenkel des Winkels;
- wissen, dass die Einheit des Winkelmaßes 1° (1 Grad) ist;
- können Winkel zeichnen und messen;
- kennen die Begriffe spitzer, rechter, stumpfer, gestreckter, überstumpfer (erhabener) und voller Winkel;
- können die Maßintervalle dieser Winkelarten angeben;
- kennen die Begriffe Scheitelwinkel und Nebenwinkel;
- wissen, dass sich Nebenwinkel zu 180° ergänzen und Scheitelwinkel maßgleich sind.

Für die Erschließung und das Verständnis des Phänomens „Winkelsumme" sind insbesondere die beiden letztgenannten Sachverhalte von tragender Bedeutung.

Bei der vorherigen Behandlung der Thematik „Winkel und Winkelmessung" muss versucht werden, für die Schülerinnen und Schülern den Anwendungsbezug und die Lebensnähe dieses Lernbereichs erfahrbar zu machen, „Winkel in unserer Umwelt" werden „gesammelt" (vergleiche hierzu die obigen Ausführungen).

Des Weiteren muss unbedingt von den wertvollen Möglichkeiten Gebrauch gemacht, die der Computereinsatz im Geometrieunterricht bietet. Die Schülerinnen und Schüler arbeiteten selbstständig mit spezifischer Software[12] zu

- Winkel schätzen
  vorgegebenen Winkeln muss zunächst die Winkelart zugeordnet werden, sodann ist das Maß möglichst genau zu schätzen;
- Winkel zeichnen
  hier kann ein Schenkel eines Winkels beliebig gedreht werden, ein vorgegebenes Winkelmaß ist „einzustellen".

Ich selbst ziehe es des Öfteren vor, mit den schlichten Mitteln der in den Textverarbeitungsprogrammen eingebetteten Zeichenfunktionen zu arbeiten; so sind viele der Zeichnungen in meinen Texten mit diesem Hilfsmittel und nicht mit komplizierten weil komplexen Zeichenprogrammen erstellt.

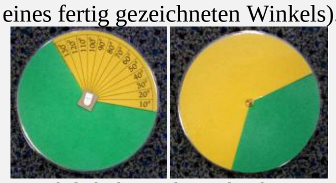
Nach wie vor leisten aber auch „traditionelle" Medien gute Dienste. Maßstab ist die möglichst hohe „Eigenbeteiligung" der Lernenden. Als Beispiel sei in diesem Zusammenhang die „Winkelscheibe" genannt, mit Hilfe derer die Schülerinnen und Schüler das Schätzen von Winkelgrößen trainieren können.

An die Behandlung der Winkelsumme im Dreieck schließen sich folgerichtig die Untersuchung verschiedener Arten von Dreiecken sowie Wechselwinkel und Stufenwinkel und abschließend der „Satz des Thales" an. Auch beim Satz des Thales können die experimentellen Möglichkeiten dynamischer Geometriesoftware ausgezeichnet genutzt werden.

Winkelscheibe

Die Winkelscheibe besteht aus zwei geschlitzten und ineinander gesteckten Vollkreisen in verschiedenen Farben; eine Scheibe ist in 10°-Sektoren eingeteilt und beschriftet. Auf der „Vorderseite" kann man Winkel mit dem gewünschten Winkelmaß einstellen, auf der Rückseite entsteht ein gleich großer Winkelsektor, der zu schätzen (oder auch zu messen) ist.

Die Winkelscheibe erlaubt Partner- und Gruppenübungen zur Winkelschätzung (-messung) mit sofortiger Kontrolle. Im Unterschied zu aufwendigen Zeichnungen kann damit ein hoher „Umsatz" erreicht werden. Außerdem repräsentiert die Winkelscheibe den dynamischen Aspekt des Drehens (statt nur den statischen eines fertig gezeichneten Winkels).



Winkelscheibe; vorder- und rückseitig

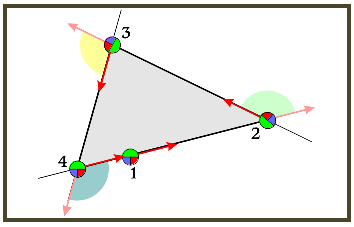
Methodenkonzeption

Traditionell wird der „Einstieg" im Sinne eines anwendungsbezogenen und problemorientierten Mathematikunterrichts über ein Praxisbeispiel gewählt, welches auf das Problem führt, in einem Dreieck mit gegebenen Winkeln fehlende (rechnerisch) zu bestimmen.

Dieser anwendungsbezogene Zugang hat neben den unbestrittenen Vorteilen, z. B. das Thema in einen sinnvollen Kontext zu stellen, aber auch Nachteile:
Neben der fachlichen Dimension treten andere Schwierigkeiten hinzu, nämlich die geschilderte Problemsituation zunächst zu erschließen und in eine mathematische zu transferieren, was erfahrungsgemäß sehr viel Zeit in Anspruch nimmt, womöglich zu Lasten einer breiten substanziellen Erschließung des Sachverhaltes.

[12] Ob der Vielzahl der auf dem Markt befindlichen und durchweg brauchbaren Programme (z. B. dynamische Geometriesoftware) soll hier keine Empfehlung gegeben werden. Auch kann man sich der in Lehrerforen zu findenden „Fertigprodukte" bedienen (z. B. Flash-Animationen).

Ein Einstieg über ein Praxisproblem ist auch deswegen nicht sinnvoll, weil die Stunde logischerweise anknüpfen muss an die vorgehende(n)[13], wo die Schülerinnen und Schüler [in Gruppen] an verschiedenen Problemen gearbeitet haben, nämlich Winkel in Dreiecken zu messen, mit verschiedenen Dreieck die Zerreißprobe durchzuführen und mit Dreiecken zu parkettieren, die nunmehr aufgegriffen und fortgeführt werden. Schlussendlich bleibt die Feststellung, dass wir immer noch nicht genau wissen, ob die Winkelsumme stets (bei allen denkbaren Dreiecken) genau 180° beträgt.
Das Parkettieren liefert zwar die Anmutung desselben, jedoch wurde es stets mit nur einem „geklonten" Dreieck zwar mehrfach durchgeführt (von vielen Schülerinnen und Schülern), aber beileibe nicht mit allen, zudem liefert die praktische Umsetzung die ernüchternde Erkenntnis, dass das Zuschneiden und Legen der Parkette eher unzulänglich gelingt[14] – ist das mangelnde Präzision des Arbeitens oder ist die Winkelsumme doch nicht exakt 180°? Dasselbe gilt für das Zusammenlegen der Ecken bei der Zerreißprobe, und auch das Messen ergibt zwar Näherungswerte um 180°, aber – warum auch immer – keine zuverlässige Erkenntnis; wie oft habe ich das im Unterricht gesehen, dass derartige Messtabellen dann als Bestätigung hergenommen wurden, die Abweichungen der Messungenauigkeit zuschreibend – mit Verlaub: das ist denklogische Perversion in höchstem Maße.



Das „Umrunden" eines Dreieckskurses (eines n-Eck-Kurses) stellt eine alltägliche Situation dar, in der Winkel respektive Winkelsummen verborgen sind (was uns allerdings nicht bewusst ist). Aus der Analyse dieses Vorgangs lässt sich die Winkelsumme im Dreieck (im n-Eck) exakt deduzieren; die einzige axiomatische, aus der Anschauung entnommene „Unterstellung" ist die Drehung des „Läufers" um 360°.

In der praktischen Umsetzung empfiehlt es sich, den Dreieckskurs (das Dreieck) auf dem Boden (großes Plakat) in der Mitte eines Stuhlkreises zu platzieren. Das Unterrichtsgespräch sollte möglichst viele Ideen und Gedanken der Schülerinnen und Schüler aufnehmen; aus der aktuellen Gegebenheit heraus kann dann entschieden werden, ob neben der Umrundung eines Dreieckskurses durch einen Läufer noch der Umlauf einer Eisenbahn (siehe oben) untersucht wird, oder ob eine Erweiterung von 3 auf 4 und mehr Ecken erfolgen kann, oder ob aus Zeitgründen auf beides verzichtet wird. Auf jeden Fall müssen die Ergebnisse noch in geeigneter Form dargestellt werden. Wichtig ist nicht nur das bloße Resultat, sondern (wie so oft) die Überlegungen, welche die Lernenden auf dem Weg dorthin leisten; nur auf diese Weise werden die der Betrachtung innewohnenden mathematischen Qualitäten – z. B. die Möglichkeit der Verallgemeinerung der Schlusskette auf n-Ecke, z. B. das überraschende Phänomen, dass die Außenwinkel eines jeden beliebigen n-Ecks zusammen stets 360° groß sind – aufgeschlossen.

Lernziele:
Die Schülerinnen und Schüler sollen …
- aus der konkreten Situation des Umlaufens eines Dreiecks-Kurses assoziativ auf die Summe der Innenwinkel schließen können;
- dazu u. a. ihr bisher erworbenes Wissen über Nebenwinkel anwenden können;
- aus der konkreten Situation des (schienengebundenen) Umfahrens eines Dreiecks-Kurses assoziativ auf die Summe der Innenwinkel schließen können;
- dazu u. a. ihr bisher erworbenes Wissen über Scheitelwinkel anwenden können;
- die Strategien erweiternd auf 4-Ecke, ..., n-Ecke übertragen können;
- das erworbene Wissen auf veränderte Situationen und neue Aufgabenstellungen übertragen können.

Wenn man in der Literatur über offene Unterrichtsformen nachlesen kann, dass es nicht wichtig sei, mit irgendetwas fertig zu werden (sprich: Lernziele zu erreichen), dann kann ich mich dieser Auffassung im Grunde anschließen und entdecke darin Lösungen für viele Probleme, die Kinder insbesondere im Mathematikunterricht haben, andererseits darf die Untugend des „Nicht-fertig-Werdens" auf diese Weise nicht zur Tugend erklärt werden; Ziele zu erreichen ist durchaus ein hohes Gut.

Die für diese Sequenz gewählte Vorgehensweise entspricht also im Wesentlichen einer **genetischen**[15]. Anknüpfend an ihr Vorverständnis entdecken die Lernenden aus dem Kontext heraus mathematische Strukturen oder vollziehen sie nach „wie sie hätten entdeckt werden können", werden nicht nur mit dem

13 Ein „Einstieg" in diesem Sinne ist sinnvoll zu Beginn der gesamten Lernsequenz, die einzelnen folgenden Stunden werden sinnvollerweise eröffnet mit einer Reaktivierung des bisher Erlernten, einer Bestandsaufnahme und mithin einer Fokussierung auf die anstehende Weiterarbeit.
14 ein gutes Beispiel für Dilemma „reale Welt" versus „ideale Vorstellungswelt [der Mathematik]"
15 vgl. E. Wittmann: Grundfragen des Mathematikunterrichts, dort nach z. B. Martin Wagenschein, Alexander Israel Wittenberg u. a.

„Fertigprodukt Mathematik“ konfrontiert. „Mathematik kann nur über den *Prozess* der Mathematisierung richtig verstanden und erlernt werden, *nicht* als Fertigfabrikat“[16].

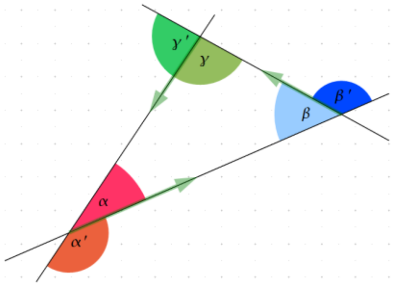
Im Grunde ist es gleichgültig, mit welcher Betrachtung (Läufer oder Eisenbahn) man beginnt. Da das Umlaufen eines Dreieckskurses von der anschaulichen Erfahrung und dem experimentellen Simulieren her einfacher ist als das schienengebundene Umfahren eines solchen, ist es womöglich sinnvoll hiermit zu beginnen, auch wenn dies von den Winkelbeziehungen her komplexer ist (es kommen die Außenwinkel – und unterschwellig der „Außenwinkelsatz“ – hinzu).
Der Stuhlkreis sollte gewählt werden, weil er alle Bedingungen für das Experimentieren und den Dialog darüber in optimaler Weise vereint; z. B. können alle Schülerinnen und Schüler den Kurs auf dem Boden gut sehen, sie sind schnell vor Ort um hantieren zu können, sie müssen nicht von der Bodenebene in eine dazu senkrechte Tafelebene umdenken u. a. m.

[16] ebd.

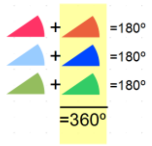
Mögliches Tafelbild

<table>
<tr>
<td>

Ein Läufer umrundet einen Dreieckskurs



$\alpha + \alpha' = 180°$
$\beta + \beta' = 180°$
$\gamma + \gamma' = 180°$
$(\alpha + \alpha') + (\beta + \beta') + (\gamma + \gamma') = 3 \cdot 180°$
$\boxed{\alpha + \beta + \gamma} + \boxed{\alpha' + \beta' + \gamma'} = 3 \cdot 180°$
$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$
$\rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180°$



</td>
<td></td>
<td>

Alle markierten Winkel sind zusammen 3·180° groß
(in jeder Ecke ein Nebenwinkelpaar mit 180°).
Die Außenwinkel sind zusammen 360° groß.
Also bleibt für die Innenwinkel zusammen 180°
(3·180° – 360°).
Das ist <u>immer</u> so, denn egal wie das Dreieck aussieht,
der Läufer dreht sich immer einmal um seine Achse.

</td>
</tr>
</table>

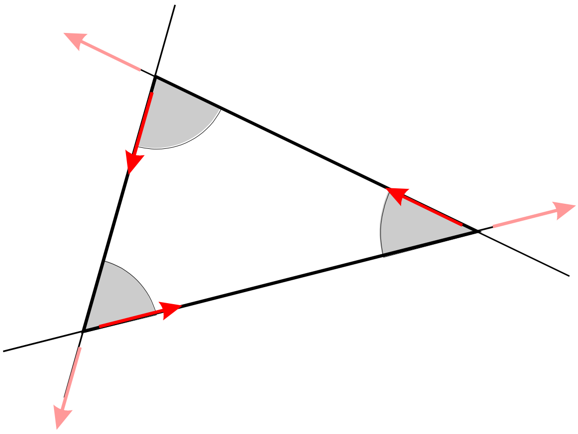
An der Tafel sollten die wesentlichen Schritte der Erarbeitung festgehalten werden. Das Tafelbild bildet die gedankliche Struktur der Problemlösung ab, bietet somit eine Lernhilfe für die Schülerinnen und Schüler und enthält das, was von den Lernenden zur Sicherung und Festigung des Gelernten festgehalten werden muss.

Wie das Tafelbild in der Notation der Winkelbeziehungen letztlich gestaltet wird, muss von der Situation abhängig machen. Denkbar sind Variationen von der konkreten Darstellung der Winkelfelder bis hin zur abstrakt-formalen Schreibweise. Im Grunde handelt es sich um eine recht einfache Beziehung der Struktur $\mathbf{x} + y = z \Rightarrow \mathbf{x} = z - y$ (in einer Summe ist ein Summand gesucht), die den Schülerinnen und Schülern an und für sich keine Schwierigkeiten bereiten dürfte, allerdings ist Skepsis angebracht. Sollten sich Probleme im assoziativen Denken einstellen, kann man diesen Schwierigkeiten mit einer einfacheren Darstellungsform begegnen.

Aufgabenblatt: Einige Vorschläge

1. Die Innenwinkel sind schon markiert, färbe sie in verschiedenen Farben. Markiere dann am Dreieck die Winkel, um die sich der Läufer in jeder Ecke dreht.
   Schneide den Kasten aus und klebe ihn in dein Merkheft. Ergänze den Text.

<u>Ein Läufer umrundet einen Dreieckskurs</u>



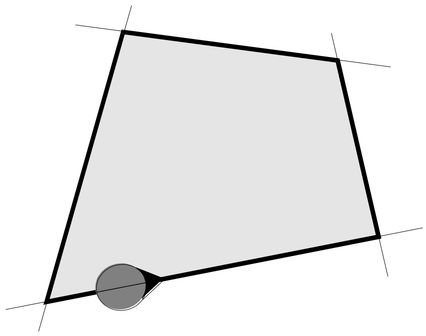
Alle markierten Winkel sind zusammen ………………
groß (in jeder Ecke ein Nebenwinkelpaar).

Die Außenwinkel sind zusammen ……………… groß.
Also bleibt für die Innenwinkel zusammen 180°,
(denn 180° = ………………………………………).
Das ist immer so, denn

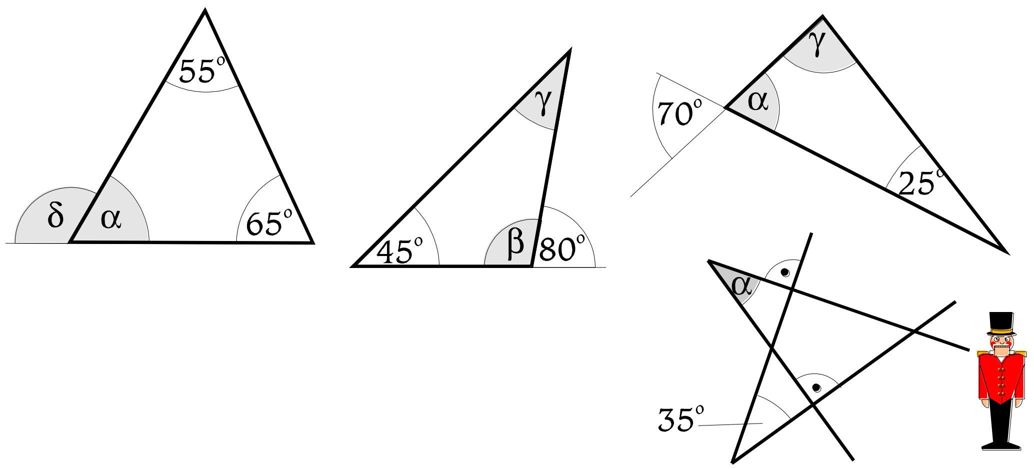
2. Du weißt, dass es spitze, rechte, stumpfe, gestreckte, überstumpfe Winkel gibt.
   Überlege, wie die drei Winkel eines Dreiecks aussehen können. Versuche, möglichst viele verschiedene Möglichkeiten zu finden und zeichne dazu jeweils ein Dreieck.
   <u>Beispiel</u>: Alle drei Innenwinkel sind spitze Winkel.

   Schreibe auch auf, welche Dreiecke es nicht geben kann und begründe.
   <u>Beispiel</u>: Es gibt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln (denn zwei rechte Winkel sind zusammen schon 180° groß, dann bleibt nichts mehr für den dritten Winkel).

3. Igel Alfred umrundet einen Viereckskurs.
   Übertrage die Zeichnung in dein Heft. Markiere die Winkel, um die er sich in jeder Ecke dreht; wie groß sind diese zusammen?
   In jeder Ecke gibt es ein Nebenwinkelpaar, das zusammen 180° groß ist. Kannst du daraus schließen, wie groß die Winkelsumme <u>im</u> Viereck ist?



4. Berechne die Winkel



Das Aufgabenblatt beinhaltet zum einen die Rekapitulation des Stundeninhalts in Form des lückenhaften Tafelbildes, das zu ergänzen ist: Winkel sind farbig zu markieren, der logische Schluss (der zur Winkelsumme führt) ist nachzuvollziehen, die Allgemeingültigkeit der Aussage zu versprachlichen.
Des Weiteren enthält das Arbeitsblatt drei Aufgaben, die verschiedene Aspekte des Lerninhalts aufgreifen:

- die möglichen Winkelgrößen im Dreieck,
- die Winkelsumme im Viereck sowie
- die Berechnung fehlender Winkel mit Hilfe der Winkelsumme.

Bei der Winkelberechnung ist auch im Hinblick auf Differenzierung eine Aufgabe mit höherem Schwierigkeitsgrad enthalten (mit einem Nussknacker markiert), die einen weiteren mathematischen Sachverhalt vorbereitet (nämlich: stehen die Schenkel zweier Winkel paarweise senkrecht, so sind die beiden Winkel gleich groß oder supplementär). Dem Aspekt der Differenzierung kann auch dadurch Rechnung getragen werden, dass nicht alle Aufgaben gelöst werden müssen, sondern eine Auswahl (zwei von drei) nach eigener Entscheidung.

Zusätzliche, selbst konzipierte Aufgaben über ein Arbeitsblatt zur Verfügung zu stellen ist wohl notwendig, insbesondere, wenn das verwendete Lehrbuch eine andere Zugangsweise mit anderen Voraussetzungen realisiert.

Ich danke meiner Tochter Stephanie Vogelsberger für Ihre Unterstützung