Kurt Vogelsberger

Rechnerische Lösung gemischt-quadratischer Gleichungen

Didaktisch-methodische Anmerkungen

Anmerkung: Die Lektüre des Aufsatzes „Parabeln" wird ergänzend empfohlen; dort sind bereits Ausführungen gemacht zur grafischen Lösung gemischt-quadratischer Gleichungen und zur Einbettung der Behandlung der Parabel in eben diese Lernsequenz. Ebenso sind Ausblicke zur rechnerischen Lösung enthalten.
Des Weiteren sei die Lektüre von „Binomische Formeln" auf meiner Homepage empfohlen. Dort werden deren Schwierigkeiten und ihre Ursachen erhellt, und es wird ein wohl eher unüblicher Weg aufgezeigt, wie die relevanten Sachverhalte nachhaltiger vermittelt werden könnten.

Prämissen

Die rechnerische Lösung gemischt-quadratischer Gleichung für die Lernenden zu erschließen, wird gemeinhin als eher schwierig eingestuft. Warum ist das so?

- Es wird in der Regel viel zu schnell auf die „Lösungsformel" $x_{1.2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ (oder besser in der Schreibung $x_{1.2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$)[1]) abgehoben, die Lösungsstrategie selbst spielt keine Rolle mehr, gerät deshalb sehr schnell in Vergessenheit, bleibt schlussendlich ohne wesentlichen Ertrag für die Lernenden.
- Die verschiedenen Facetten der Lösungsstrategie sind nicht abrufbar präsent:
  - das Wissen um den Sachverhalt „ein Produkt ist gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist";
  - die Darstellung quadratischer Terme als Flächeninhalte von Rechtecken mit geeigneten Seitenlängen als durchgängiges Prinzip im MU;
  - die Faktorisierung von Summen (binomische Formeln invers);
  - die Leitidee „Grundmenge – Aussageform – Lösungsmenge" (lediglich die Aussageformen und auch die jeweiligen Zahlenbereiche werden komplexer, die Grundstruktur jedoch bleibt durchweg dieselbe);
  - die Umwandlung komplexer Aussageformen in einfachere Aussageformen mit derselben Lösungsmenge (also „äquivalente") als Lösungsprinzip;
  - das „Formelprinzip": Die „allgemeine" Lösung mit Variablen, um wiederkehrende Lösungsmechanismen nicht stets von neuem durchführen zu müssen, nur mit jeweils anderen Zahlen; die Lösung mit Variablen liefert einen Lösungsterm, in den nur die jeweiligen Werte einzusetzen sind; das spart Arbeit.

Das Thema beinhaltet also eine ganze Reihe von Schwierigkeiten und braucht stabile Voraussetzungen aus vorausgegangenen Lernprozessen, bietet damit aber zugleich auch hervorragende Möglichkeiten, mathematisches Denken und Handeln zu trainieren, indem die o. bez. Sachverhalte eingebunden werden und schließlich zur Lösung des Problems führen.

Ich gehe davon aus, dass gemischt-quadratische Gleichungen in der Regel zunächst grafisch gelöst werden. Dies ist naheliegend, da das grafische Lösungsverfahren eine sehr viel bessere Anschauung vermittelt denn das rechnerisch-algebraische, etwa bezüglich der Existenz von Lösungen.
Zudem liefert das grafische Verfahren Lösungen zu vielen Beispielen gemischt-quadratischer Gleichungen, was dann als Ansatzpunkt herhalten kann für das Nachdenken über ein rechnerisches Verfahren. Ausgehend von der Feststellung, dass natürlich die Koeffizienten der Gleichung etwas zu tun haben müssen mit der oder den Lösungen, könnte eine tabellarische Erfassung bereits Anmutungen initiieren in Richtung „Satz von Vieta" und womöglich auch Lösungsideen in Richtung Faktorisierung der Gleichung bei der Suche nach äquivalenten und zugleich einfacheren Aussageformen, deren Lösungsmenge einfach „ablesbar" ist.

Beispiele:

Aussageform	Koeffizienten		Lösungen		Vermutungen	Äquivalente Aussageform
$x^2+px+q=0$	p	q	x_1	x_2		
$x^2+x-6=0$	1	−6	2	−3	*Die Faktorisierung liefert ablesbar die Lösungen;* $x_1 \cdot x_2 = q$; $x_1 + x_2 = -p$	$(x-2)\cdot(x+3)=0$
$x^2+6x+8=0$	6	8	−4	−2		$(x+4)\cdot(x+2)=0$
$x^2-8x+15=0$	−8	15	5	3		$(x-5)\cdot(x-3)=0$
$x^2+6x+9=0$	6	9	−3			$(x+3)\cdot(x+3)=0$
$x^2+2{,}5x-37{,}5=0$	2,5	−37,5	−7,5	5		$(x+7{,}5)\cdot(x-5)=0$

In Anlehnung an die grafische Lösung lässt sich hier auch die Vorstellung einbinden, dass „nur eine Lösung" verstanden werden kann als „zwei gleiche Lösungen".

[1] Diese Schreibung macht rechentechnisch deutlicher, dass der Wert $\frac{p}{2}$ vor der Wurzel einfach zu quadrieren ist, um den ersten Summanden $(\frac{p}{2})^2$ des Radikanden zu ermitteln.

Des Weiteren resultieren aus der Behandlung der grafischen Lösung auch bereits Kompetenzen bezüglich der Faktorisierung der Summen mit Hilfe der quadratischen Ergänzung (sofern die Scheitelform der Parabel Gegenstand des Lernens war).

Die Suche nach einem rechnerischen Weg könnte beginnen bei gemischt-quadratischen Gleichungen mit nur einer (bzw. zwei gleichen) Lösung(en), die sich mit Hilfe inverser Anwendung der binomischen Formeln unmittelbar faktorisieren lassen:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 &= 0 \\ \text{erste binomische Formel} &\vdots \\ (x+3)\cdot(x+3) &= 0 \\ x_1 = x_2 &= -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 14x + 49 &= 0 \\ \text{zweite binomische Formel} &\vdots \\ (x-7)\cdot(x-7) &= 0 \\ x_1 = x_2 &= 7 \end{aligned}$$

Es könnten auch weitere Sonderfälle gemischt-quadratischer Gleichungen besichtigt werden, z. B. jene, bei denen q = 0 ist und deswegen ausgeklammert werden kann. Diese Lösungen sind leicht zu finden, und zur nachstehenden Struktur ist kein weiter Weg für die Schülerinnen und Schüler:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x &= 0 \\ &\vdots \quad \text{ausklammern} \\ x\cdot(x+6) &= 0 \\ x = 0 \quad &\vee \quad x+6=0 \\ x = 0 \quad &\vee \quad x=-6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 + px &= 0 \\ &\vdots \quad \text{ausklammern} \\ x\cdot(x+p) &= 0 \\ x = 0 \quad &\vee \quad x+p=0 \\ x = 0 \quad &\vee \quad x=-p \end{aligned}$$

Insbesondere kann hiermit die Logik „Ein Produkt ist gleich Null, wenn der erste Faktor gleich Null ist oder der zweite!", also das Aufsplitten des Produkts in eine Oder-Verknüpfung realisiert werden.
Mit den so geschaffenen Bausteinen kann an einem Beispiel mit bekannten Lösungen der logische Aufbau des Lösungsverfahrens entwickelt werden:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 8 &= 0 \\ &? \\ x+4=0 \quad &\vee \quad x+2=0 \\ x=-4 \quad &\vee \quad x=-2 \\ \mathbb{L} &= \{4;2\} \end{aligned}$$

Das doppelte gemischte Produkt
6·x = 2·3·x
durch 2 dividieren, durch x dividieren, den erhaltenen Wert 3 quadrieren ergibt die quadratische Ergänzung

zum Faktorisieren von $(x+3)^2 \; -1$ könnten ikonische Hilfen gegeben werden, z. B.
$\Delta^2 - \blacksquare^2 = (\Delta + \blacksquare)\cdot(\Delta - \blacksquare)$

			Rationale Lösung
$x^2 + \mathbf{6x} + 8$	$=$	0	
$\underbrace{x^2 + 6x + \mathbf{9}}\underbrace{-\,\mathbf{9} + 8}$	$=$	0	quadratische Ergänzung
$(x+3)^2 \quad -1$	$=$	0	Zusammenfassen (Differenz!)
$[(x+3)+1]\cdot[(x+3)-1]$	$=$	0	Faktorisieren (3. binomische Formel)
$(x+4)\cdot(x+2)$	$=$	0	Zusammenfassen
$x+4=0$	$\vee$	$x+2=0$	Oder-Verknüpfung
$x=-4$	$\vee$	$x=-2$	nach x „auflösen"
$\mathbb{L}_{\mathbb{Q}} = \{4;2\}$			

Natürlich muss das Spektrum der Beispiele alle Möglichkeiten abdecken, wie nicht rationale Lösungen oder keine Lösung in ℝ.

			Irrationale Lösung
$x^2 + \mathbf{4x} + 2$	$=$	0	
$\underbrace{x^2 + 4x + \mathbf{4}}\underbrace{-\,\mathbf{4} + 2}$	$=$	0	quadratische Ergänzung
$(x+2)^2 \quad -2$	$=$	0	Zusammenfassen (Differenz!)
$[(x+2)+\sqrt{2}]\cdot[(x+2)-\sqrt{2}]$	$=$	0	Faktorisieren (3. binomische Formel)
$x+2+\sqrt{2}=0$	$\vee$	$x+2-\sqrt{2}=0$	Oder-Verknüpfung
$x=-2-\sqrt{2}$	$\vee$	$x=-2+\sqrt{2}$	nach x „auflösen"
$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$			

Sofern zu diesem Zeitpunkt die Wurzeln und die irrationalen Zahlen noch nicht behandelt sind (was aber meist wohl zuvor bei den rein-quadratischen Gleichungen oder auch der Parabel angebunden wird, also als gegeben angenommen werden kann), kann das Symbol $\sqrt{\ldots}$ (oder ein sonstiges) als vorläufige Kennzeichnung dienen für die jeweils gesuchte Zahl (die mit sich selbst multipliziert … ergibt).

$x^2 - \mathbf{8x} + 20$	$=$	0	*keine Lösung in* $\mathbb{R}$
$\underbrace{x^2 - 8x + \mathbf{16}}\underbrace{- \mathbf{16} + 20}$	$=$	0	quadratische Ergänzung
$(x-4)^2 \quad +4$	$=$	0	zusammenfassen
$(x-4)^2 - (-4)$	$=$	0	als Differenz schreiben (Bedingung für die inverse Anwendung der 3. binomischen Formel)
Es gibt in keine Zahl, die mit sich selbst multipliziert eine negative Zahl ergibt! Mithin gibt es keine Lösung!			

Mit der erarbeiteten Strategie und den vorstehenden „Lösungsmustern“ kann jede gemischt-quadratische Gleichung bearbeitet werden. Im Folgenden muss es im Unterricht dann darum gehen, die Lösungsstrategie an einer reichhaltigen Vielzahl von Beispielen zu trainieren. Zu empfehlen ist jedenfalls, die allgemeine Lösung nicht zu schnell anzuschließen, was gewiss zu „Formelismus“ führen würde, also einer sturen Anwendung einer Formel, deren Genese und Hintergrund allzu schnell in Vergessenheit geraten. Die Erkenntnis muss <u>reifen</u>, dass im Grunde stets dieselben Schritte vollzogen werden, lediglich mit wechselnden Zahlen, insofern es Sinn machen würde, diese „Rechnung“ einmal allgemein, also mit Formvariablen, zu vollziehen, und in der erhaltenen „Lösung“ (Lösungsterm) nur noch die jeweiligen Werte der Formvariablen einzusetzen – das spart Arbeit!

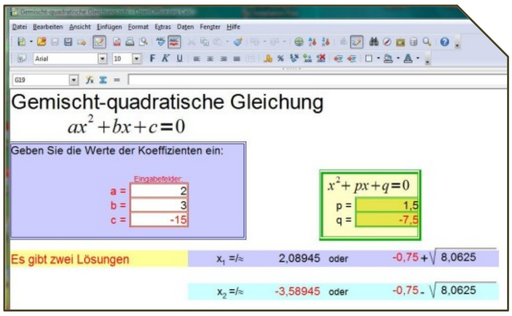
Die nachfolgend dargestellte „Berechnung“ der allgemeinen Lösung bedarf in der Regel natürlich eines parallel durchgeführten Zahlenbeispiels und der jeweiligen Übertragung der Schritte in die allgemeine Form.

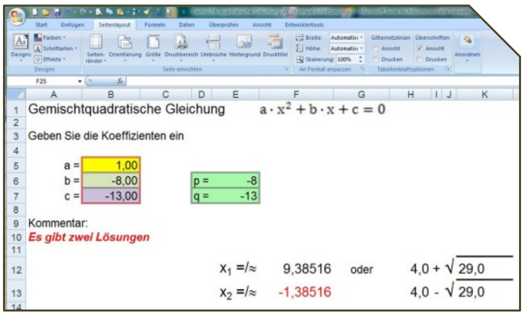
$x^2 + \mathbf{px} + q$	$=$	0	*Allgemeine Lösung*
$x^2 + px + \left(\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} - \left(\frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{2}} + q$	$=$	0	quadratische Ergänzung
$(x + \frac{p}{2})^2 - \left[\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\right]$	$=$	0	Zusammenfassen (Differenz!)
$\left\{(x+\frac{p}{2}) + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\} \cdot \left\{(x+\frac{p}{2}) - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}$	$=$	0	Faktorisieren (3. binomische Formel)
$x + \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0$	$\vee$	$x + \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = 0$	Oder-Verknüpfung
$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	$\vee$	$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	nach x „auflösen“
Kurzform: $x_{1.2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$			

Bei noch so sorgsamer Grundlegung mit Hilfe von Beispielen dürfte dies wohl den meisten Schülerinnen und Schülern Schwierigkeiten bereiten. Im Unterricht ist deswegen darauf zu achten, dass das logische Konstrukt nicht zu schnell vollzogen wird, etwa unter Beteiligung vorrangig der leistungsstärkeren Klientel.

Sofern Tabellenkalkulationen grundgelegt sind, wovon eigentlich ausgegangen werden muss, könnten die Lernenden (evtl. gar <u>zuvor</u>) ein Tabellenblatt entwickeln, das zu beliebigen Belegungen der Formvariablen die jeweilige Lösung automatisiert produziert.

Mögliche Realisierungen sind diesem Dokument zum Downloaden beigefügt (in den Formaten <OpenOffice: ods> und <MS Office: xls>). Nachstehend sind die Tabellenblätter abgebildet.





<u>Hinweis</u>: Die Tabellen sind bis auf die Eingabefelder geschützt, jedoch ohne Passwort, der Schutz lässt sich also problemlos aufheben.

Schülerinnen und Schüler werden dabei in hohem Maße gefordert, da die innewohnende Logik abgebildet werden muss und alle Eventualitäten zu berücksichtigen sind.

Zur Lösung gemischt-quadratischer Gleichungen unter Verwendung der Lösungsformel sei noch angemerkt, dass es nach meinem Dafürhalten keinen Sinn macht, zu schwierige Werte für p und q wie etwa diffizile Brüche vorzugeben; das ehedem schon Komplizierte sollte nicht durch Defizite der Lernenden in z. B. der Bruchrechnung zusätzlich belastet werden.

Mit der allgemeinen Lösung können nunmehr auch die eingangs angegebenen Vermutungen

- $x_1 \cdot x_2 = q$ ***?***
- $x_1 + x_2 = -p$ ***?***

des Vietaschen Satzes verifiziert werden:

$$\boldsymbol{x_1 + x_2} = -\tfrac{p}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q} + \left(-\tfrac{p}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = -\tfrac{p}{2} + \underline{\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}} - \tfrac{p}{2} - \underline{\sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}} = -\tfrac{p}{2} - \tfrac{p}{2} = \boldsymbol{-p}$$

$$\boldsymbol{x_1 \cdot x_2} = \left(-\tfrac{p}{2} + \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}\right) \cdot \left(-\tfrac{p}{2} - \sqrt{\left(\tfrac{p}{2}\right)^2 - q}\right) = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \boldsymbol{q}$$

was anschließend dann neben dem Einsetzen der Lösung in die Ausgangsgleichung als weitere Möglichkeit der „Probe" Verwendung findet, aber auch zum Generieren gemischt-quadratischer Gleichungen mit bestimmten Lösungen.

Schülerinnen und Schüler können Aufgaben für ihre Mitschüler kreieren, für Übungen, für Lernzielkontrollen, gar für Klassenarbeiten, sie können dazu Lösungsblätter fertigen, z. B. zur Verwendung bei übender Stationenarbeit usf.
